学　　号：4201210000322

贵 州 师 范 大 学 硕 士 学 位 论 文

高阶复微分方程的解

Solutions of higher order complex differential equations

专 业 名 称：基 础 数 学

专 业 代 码：0 7 0 1 0 1

研 究 方 向：函　数　论

申请人姓名：易　善　峰

导 师 姓 名：伍鹏程(教授)

二零一五年四月五日

目　录

摘　要 …… I

Abstract …… II

1 引言与主要结果 …… 1

　1.1 国内外研究现状及研究意义 …… 1

　1.2 本文相关定义及记号 …… 2

　1.3 主要结果 …… 4

2 复平面高阶微分方程解的[p,q]增长级 …… 6

　2.1 引言与结果 …… 6

　2.2 引理 …… 7

　2.3 定理1的证明 …… 8

　2.4 定理2的证明 …… 9

3 单位圆上高阶齐次线性微分方程解的[p,q]增长级 …… 11

　3.1 引言与结果 …… 11

　3.2 引理 …… 11

　3.3 定理3的证明 …… 12

　3.4 定理4的证明 …… 12

4 总结和展望 …… 13

　4.1 总结 …… 13

　4.2 展望 …… 13

参考文献 …… 15

附　录 …… 18

致　谢 …… 19

原创性声明 …… 20

摘　要

本文主要利用复线性微分方程理论,Wiman-Valiron理论和Nevanlinna值分布理论的研究成果和基本方法, 并以最近国内外对此类问题的研究视角和处理方法, 研究了复平面上的高阶复微分方程

$$(f^{(k)})^{n_k}+A_{k-1}(z)(f^{(k-1)})^{n_{k-1}}+\cdots+A_1(z)(f')^{n_1}+A_0(z)f=0 \tag{1}$$

的解的$[p,q]$ 增长级, 这里的 $A_j(z), j=0,1,\cdots,k-1$ 都是复平面上的解析函数. 我们也研究了单位圆上的高阶齐次复线性微分方程

$$f^{(k)}+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}+\cdots+A_1(z)f'+A_0(z)f=0 \tag{2}$$

的解的$[p,q]$ 增长级, 这里的 $A_j(z), j=0,1,\cdots,k-1$ 都是单位圆上的解析函数.

全文共分为三个部分:

第一部分 (引言) 介绍国内外对此方向的研究现状, 并且引入了相关符号和定义及其陈述本文研究所得到的结果.

第二部分 (第二章) 研究了复平面上的高阶复微分方程, 其中所有的系数都复平面上的解析函数. 我们研究是它的系数的$[p,q]$增长级和解的$[p,q]$增长级之间的关系.

第三部分 (第三章) 研究了单位圆上高阶复线性微分方程的系数在相同情形时解的$[p,q]$增长级和系数的$[p,q]$增长级之间的关系.

第四部分 (第四章) 对本文的研究工作进行了总结, 叙述了其中的不足并对将来能够继续研究的问题进行了分析和展望.

关键词:高阶; 复微分方程; 复平面; 单位圆; $[p,q]$增长级

Abstract

In this paper, we mainly use the research results and the existing methods and theory of complex differential equation, Wiman-Valiron and value distribution of meronorphic function theory and use the latest research methods and treatment for this kind of problems in the domestic and international to study the $[p, q]$ growth order of solutions of higher order complex differential equation

$$(f^{(k)})^{n_k} + A_{k-1}(z)(f^{(k-1)})^{n_{k-1}} + \cdots + A_1(z)(f')^{n_1} + A_0(z)f = 0$$

where $A_j(z), j = 0, 1, \cdots, k-1$ is analytic in the complex plane $\mathbb{D}$.

We also study the $[p, q]$ growth order of solutions of higher order linear equation

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)f' + A_0(z)f = 0$$

where $A_j(z), j = 0, 1, \cdots, k-1$ is entire function in the unit disc.There are three parts in this paper.

In part 1 (Introduction) We give an introduction of status and significance of research on this field in domestic and foreign, and bring in some related definitions and signs, and state the results that will be considered in this paper.

In part 2 (Chapter 2) We think over high order differential equation with their coefficient is analytic in the complex plane $\mathbb{D}$. we research the $[p, q]$ order of the solution of differential equations.

In part 3 (Chapter 3) We rearch the the $[p, q]$ order growth of solutions of complex higher order differential equation in the unit disc.

In part 4 (Chapter 4) We summarized the research work, describe the deficiencies and what problems can we to continue to study in the future, analysis and prospect those problems.

Key Words: hight order; Complex differential equations; complex plane; unit disc; $[p, q]$ growth order

1 引言与主要结果

1.1 国内外研究现状及研究意义

众所周知,整个20世纪人们对数学的研究基本都集中在函数上, 所以数学家们称20世纪为函数的时代. 函数的发展使人类对客观世界的认识从静止发展到了对运动事物的刻画, 其本身也开创了多个数学方向,微分方程就是其中之一. 对于复域上的线性微分方程的研究则始于80 年代, 当时人们对整函数和亚纯函数的研究已经相当深入(参见[1,2]) ,亚纯函数值分布、函数空间、常微分方程等各个数学领域的研究也已经取得很大进展, 因此人们开始考虑复域上的微分方程的解的性质是一个很自然的过程. 但是我们知道即便是常微分方程在很多情况下也是不可能求出其解的具体表达式, 很多情况下我们只能去估计它, 用其他的方式去了解它, 更何况现在我们考虑的是复域上的微分方程, 其系数也是一个复函数, 想要求出它的解的具体表达形式显然是不现实的.Neanlinna 值分布理论的研究给我们去认识函数的本质性质提供了一个很好的工具, 值分布粗略的说只关心一个亚纯函数的增长级和其零点在复平面上的分布情况, 而在此过程中我们并不需要知道函数的精确形式, 这为我们去了解和研究复微分方程的系数和解之间的关系提供了可能.

从目前复微分方程的研究内容来看, 大致可以分为三个方向: 解的增长级,零点分布,解的空间属性. 从研究的区域来看也可以分为三个部分: 复平面上的微分方程; 单位圆上的微分方程; 角域上的微分方程. 很多学者如美国数学家Bank 和芬兰数学家I.Laine, Chr.Pommerenke, J.Heittokangas 等人在这三个区域内深入研究了复微分方程的增长级,零点分布,解的空间属性等问题, 得到了很多有意义的结果(参见[3-9]). 当然得到这些结果不仅仅只靠亚纯函数值分布理论, 还有函数空间算子理论,位势理论,常微分方程等理论的支撑, 但是我们既然是要研究微分方程的解这样一个函数, 在很大程度上其依赖于我们对亚纯函数的了解程度, 可以说如果我们对亚纯函数的认识越深刻, 对微分方程解的性质了解就越多. 最近有学着提出了有限$[p, q]$ 级亚纯函数的概念, 并且对此类函数作了深入研究(参见[10-16]), 这个概念提出后很多学者开始把它运用到了复线性微分方程的研究中去, 得到关于解的增长级比之前更加精确的结果.

在国内, 伍胜健,陈宗煊,高仕安,何育赞,肖治经等人很早就开始从事研究复线性微分方程的工作, 也取得了很多优秀的结果(参见[17-22]). 总之, 对于复线性微分方程的研究是数学发展的一个重要方向, 对它的研究具有特别重要的意义. 本文研究的第一个问题是目前国内外都很少有人涉及的一种方程, 比起高阶齐次复线性微分方程它具有

更加一般的形式, 以前大家研究的其次线性微分方程只是它的一种特殊形式. 之所以针对这个具有更一般形式的高阶微分方程的研究很少, 是因为处理这个方程时以前很多处理方法变得不适用, 很难得到类似于高阶齐次线性微分方程的结果, 因此想要研究它的增长级和零点分布是相当困难的. 本文除了利用$[p,q]$增长级的概念和方法对上述问题进行了深入的研究, 得出了两个定理, 同时也使用相同的视角研究了单位圆上的高阶齐次线性微分方程的解的增长级, 并得到了一个相关的定理.

1.2 本文相关定义及记号

我们假定读者熟悉复平面和单位圆内亚纯函数值分布理论的标准记号和主要结果(参见[7,15,16]).

定义1 对于$r \in [0,+\infty)$, 令$exp_1 r := e^r$, $exp_{n+1} r := exp(exp_n r), n \in N$.
当r足够大时, 令$log_1 r := log^+ r = max\{logr, 0\}$, $log_{n+1} r := log(log_n r), n \in N$.
特殊情况下有:$exp_0 r := r = log_0 r$, $log_{-1} r := exp_1 r$, $exp_{-1} r := log_1 r$.

定义2 设$p \geq q \geq 1$ 且都为正整数，我们定义复平面上亚纯函数的$[p,q]$级为:

$$\sigma_{[p,q]}(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{log_p^+ T(r,f)}{log_q r},$$

如果$f(z)$是复平面上的整函数, 则$f(z)$的$[p,q]$级为:

$$\sigma_{M,[p,q]}(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{log_{p+1}^+ M(r,f)}{log_q r}.$$

其中$T(r,f)$为亚纯函数的特征函数,$M(r,f)$为整函数的最大模，下文都如此记.

定义3 如果$f(z)$是复平面上的亚纯函数, 则$f(z)$的迭代p级 ($p \geq 1$且为整数)为:

$$\sigma_p(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{log_P^+ T(r,f)}{logr},$$

如果$f(z)$是复平面上的整函数, 则$f(z)$的迭代p级 ($p \geq 1$且为整数)为:

$$\sigma_{M,p}(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{log_{p+1}^+ M(r,f)}{logr}.$$

定义4 设$p \geq q \geq 1$ 且都为正整数，我们定义单位圆上亚纯函数的[p,q]级为:

$$\sigma_{[p,q]}(f) = \limsup_{r\to 1^-} \frac{log_p^+ T(r,f)}{log_q \frac{1}{1-r}},$$

如果$f(z)$是复平面上的整函数则[p,q]级为:

$$\sigma_{M,[p,q]}(f) = \limsup_{r\to 1^-} \frac{log_{p+1}^{+} M(r,f)}{log_q \frac{1}{1-r}}.$$

定义5 如果$f(z)$是单位圆上的亚纯函数, 则$f(z)$的迭代p ($p \geq 1$且为整数)为:

$$\sigma_p(f) = \limsup_{r\to 1^-} \frac{log_P^{+} T(r,f)}{log \frac{1}{1-r}},$$

如果$f(z)$是单位圆上的整函数, 则$f(z)$的迭代p ($p \geq 1$且为整数)为:

$$\sigma_{M,p}(f) = \limsup_{r\to 1^-} \frac{log_{p+1}^{+} M(r,f)}{log \frac{1}{1-r}}.$$

容易看出$0 \leq \sigma_{[p,q]}(f) \leq \infty$, 如果$f(z)$是一个不可允许函数, 则对于任意的$p \geq q \geq 1$, 且我们都有$\sigma_{[1,1]}(f) = \sigma_1(f) = \sigma(f)$以及$\sigma_{[p+1,1]}(f) = \sigma_{p+1}(f)$, $\sigma_{[p,q]}(f) \leq \sigma_{M,[p,q]}(f) \leq \sigma_{[p,q]}(f) + 1$.

性质1 设$p \geq q \geq 1$ 且都为正整数, $f(z)$是单位圆上的$[p,q]$级解析函数, 则其有下面两个性质:

(i)如果$p = q$,则

$$\sigma_{[p,q]}(f) \leq \sigma_{M,[p,q]}(f) \leq \sigma_{[p,q]}(f) + 1,$$

(i)如果$p > q$,则

$$\sigma_{[p,q]}(f) = \sigma_{M,[p,q]}(f).$$

定义6 在单位圆上的重级亚纯函数$f(z)$的增长指数定义为:

$$i(f) = \begin{cases} 0, & \text{f(z)是非可允许函数,} \\ \min\{j \in N{:}\sigma_j(f) \leq \infty\}, & \text{f(z)是可允许函数,} \\ \infty, & \sigma_j(f) = \infty\text{对于所有的}j \in N. \end{cases}$$

而对于单位圆上的解析函数，我们同样定义$f(z)$的增长指数定义为:

$$i(f) = \begin{cases} 0, & \text{f(z)是非可允许函数,} \\ \min\{j \in N{:}\sigma_{M,j}(f) \leq \infty\}, & \text{f(z)是可允许函数,} \\ \infty, & \sigma_{M,j}(f) = \infty\text{对于所有的}j \in N. \end{cases}$$

注意: 如果$\sigma_p(f) < \infty$或者$i(f) \le p$, 则我们说$f(z)$是有限p重级的, 如果$\sigma_p(f) = \infty$或者$i(f) > p$，则我们说$f(z)$是无穷p重级的, 特别的, 如果$\sigma_1(f) < \infty$或者$i(f) \le 1$, 则我们说$f(z)$是有限级的, 如果$\sigma_1(f) = \infty$或者$i(f) > 1$, 则我们说$f(z)$是无穷级的.

1.3 主要结果

我们首先研究了复平面上的高阶微分方程, 当方程的系数A_0满足一定条件时, 方程的解的$[p,q]$ 增长级. 我们得到下述结果:

定理1 假设$A_0, A_1, \ldots, A_{(k-1)}$是复平面上的的解析函数, 且

$$max\{\sigma_{[1,2]}(A_j) : j = 1, 2, \ldots, k-1\} < \sigma_{[1,2]}(A_0) < +\infty,$$

则方程（1）的任意一个非零的解析解满足

$$\sigma_{[1,2]} f \ge \sigma_{[1,2]}(A_0).$$

其次，我们研究了在一般的情况下, 系数A_s的$[p,q]$ 增长级和解的$[p,q]$级的关系, 得到了如下定理:

定理2 假设$A_0, A_1, \ldots, A_{(k-1)}$是复平面上的的解析函数, 且

$$max\{\sigma_{[1,2]}(A_j) : j \ne s\} < \sigma_{[1,2]}(A_s) < +\infty,$$

则方程（1）的任意一个非零的解析解满足

$$\sigma_{[1,2]} f \ge \sigma_{[1,2]}(A_s).$$

然后在相同的系数条件下研究了单位圆上的高阶线性微分方程的系数和解的增长关系, 得到了如下定理:

定理3 假设$A_0, A_1, \ldots, A_{(k-1)}$是单位圆上的解析函数, 且

$$max\{\sigma_{[1,2]}(A_j) : j = 1, 2, \ldots, k-1\} < \sigma_{[1,2]}(A_0) < +\infty,$$

则方程（2）的任意一个非零的解析解满足

$$\sigma_{[2,2]} f \ge \sigma_{[1,2]}(A_0).$$

定理4 假设$A_0, A_1, \ldots, A_{(k-1)}$是单位圆上的解析函数, 且

$$max\{\sigma_{[1,2]}(A_j) : j \ne s\} < \sigma_{[1,2]}(A_s) < +\infty,$$

则方程（2）的任意一个非零的解析解满足

$$\sigma_{[2,2]} f \ge \sigma_{[1,2]}(A_s).$$

注意: 定理1和定理2得出的结论是关于复平面上$\sigma_{[1,2]}f$和系数$\sigma_{[1,2]}(A_s)$的大小关系,而定理3和定理4则是在单位圆上得到了关于$\sigma_{[2,2]}f$和系数$\sigma_{[1,2]}(A_s)$的大小关系, 我们可以发现在复平面和单位圆上研究相同的问题得出的结论却不一定相同, 因此在复平面上和单位圆上研究方程解的性质必须要特别谨慎.

2 复平面高阶微分方程解的[p,q]增长级

2.1 引言与结果

本章主要考虑复平面上高阶微分方程

$$(f^{(k)})^{n_k} + A_{k-1}(z)(f^{(k-1)})^{n_{k-1}} + \cdots + A_1(z)(f')^{n_1} + A_0(z)f = 0$$

系数的$[p,q]$增长级和解的$[p,q]$增长级的关系, 其中 $A_j(z), j = 0, 1, \cdots, k-1$都是复平面上不恒为零的解析函数, n_k都为正整数.

人们开始研究复线性微分方程时最先考虑的是复平面上方程系数为整函数时解的增长级和零点的分布问题(参见[23-33]), 主要依靠Nevanlinna值分布理论、Wiman-valion理论、渐进理论去研究它, 后来又有学者考虑了系数为亚纯函数时方程的增长级和零点分布(参见[5]), 再后来人们对它的研究不断深化, 很多人研究了系数在其他情况时方程解的增长级和零点分布, 使得人们对方程的解的性质有了更加清晰的了解. 在这方面, 国外的Lipo Liane、Bank、Chr.Pommerenke、Gundensen、Langlany和J.Heittokangas等人做了很多开创新的工作, 得到了许多有价值的结果(参见[3-10]). 例如Chr.Pommerenke首先使用函数空间的算子理论来研究了微分方程解的空间属性,J.Heittokangas 首次提出了Blaschke-Oscillary微分方程的概念, 并且他还深入研究了单位圆上亚纯函数的性质, 而且提出了一些到目前为止都还没有解决的开放性问题(参见[7]); Gundensen 对复平面上亚纯系数微分方程解的增长做了很好的估计(参见[11-14]), 他们对微分方程震荡理论的研究做出了巨大贡献. 国内, 陈宗煊、高仕安和陈特等人很早也开始研究复微分方程震荡理论, 也得到了很多优秀的结果,解决了一些国际上遗留的难题(参见[16,17]). 伍胜健第一次把亚纯函数的Borel 方向的概念引入到了微分方程理论之中,为在角域内研究微分方程解的性质提供了许多新思路(参见[16,17]). 最近, 对于微分方程解的增长性人们已经不满足于粗略的估计, 比如有两个亚纯函数都是无穷级的, 或者它们的增长速度都是零级, 但哪个的速度增长更快, 是我们想了解的问题. 为此, $[p,q]$ 级亚纯函数的概念开始被很多学者用来研究微分方程的解的增长, 但是研究的对象主要集中在二阶和高阶齐次线性方程上, 目前对于本文所要研究的第一个方程还没有太多结果.

在本章我们也将使用亚纯函数$[p,q]$级的概念来研究复平面上高阶复微分方程的增长性问题, 这个方程比目前国内外研究的方程具有更加一般的形式, 它包含了非线性、非齐次的微分方程, 我们得到了以下定理:

定理1 假设$A_0, A_1, \ldots, A_{(k-1)}$是复平面上的解析函数, 且

$$max\{\sigma_{[1,2]}(A_j) : j = 1, 2, \ldots, k-1\} < \sigma_{[1,2]}(A_0) < +\infty,$$

则方程（1）的任意一个非零的解析解满足

$$\sigma_{[1,2]} f \geq \sigma_{[1,2]}(A_0).$$

定理2 假设$A_0, A_1, \ldots, A_{(k-1)}$是复平面上的的解析函数, 且

$$max\{\sigma_{[1,2]}(A_j) : j \neq s\} < \sigma_{[1,2]}(A_s) < +\infty,$$

则方程（1）的任意一个非零的解析解满足

$$\sigma_{[1,2]} f \geq \sigma_{[1,2]}(A_0).$$

注意: 定理1体现了系数A_0的增长级对于解的增长级的影响, 而定理2则体现了其他系数的增长级对解的增长级的影响, 它们都比以前对方程系数与解的增长关系的研究更加精确.

2.2 引理

为证明上述定理, 我们需要如下两个引理:

引理2.1[11] 设k和j都是整数且$k > j > 0$, $f(z)$是复平面上的一个亚纯函数使得$f^{(j)}$不一致趋于0, 则存在一个常数$r_0 > 1$使得:

$$m(r, \frac{f^{(k)}}{f^{(j)}}) \leq (k-j)log^{+}\frac{\rho(T(r,f))}{r(\rho - r)} + log\frac{k!}{j!} + (k-j)5.3078$$

对于所有的$r_0 < r < \rho < \infty$成立. 如果$f(z)$为有限级s的, 则

$$\limsup_{r \to +\infty} \frac{m(r, \frac{f^{(k)}}{f^{(j)}})}{logr} < max\{0, (k-1)(s-1)\}.$$

引理2.2[11] 设$f(r)$是一个连续和非减函数, $r \in (0, +\infty)$且有对数级$\sigma_{[1,2]}$, 则对于$(0, +\infty)$的任何一个对数测度有限的子集, 存在一个点列r_n, $r_n \notin E_1$使得

$$\sigma_{[1,2]}(f) = \lim_{r \to +\infty} \frac{logf(r_n)}{loglogr_n}.$$

2.3 定理1的证明

证明: 假设$f(z)$是方程（1）的一个非零解, 将（1）化简得到

$$-A_0(z)=\frac{(f^{(k)})^{n_k}}{f}+A_{k-1}(z)\frac{(f^{(k-1)})^{n_k}}{f}+\cdots+A_1(z)\frac{f'}{f}$$

$$m(r,A_0)\le\sum_{j-1}^{k-1}m(r,A_j)+\sum_{j-1}^{k}m(r,\frac{(f^{(k)})^{n_k}}{f}) \tag{3}$$

因为

$$m(r,\frac{(f^{(j)})^{n_j}}{f})=m(r,\frac{f^{(j)}}{f}\cdot\underbrace{f^{(j)}\cdot f^{(j)}\cdots f^{(j)}}_{n_j-1})$$

$$\le m(r,\frac{f^{(j)}}{f})+(n_j-1)m(r,f^{(j)})$$

$$=m(r,\frac{f^{(j)}}{f})+(n_j-1)m(r,\frac{f^{(j)}}{f}\cdot f)$$

$$\le m(r,\frac{f^{(j)}}{f})+(n_j-1)m(r,\frac{f^{(j)}}{f})+(n_j-1)m(r,f)$$

$$=n_jm(r,\frac{f^{(j)}}{f})+(n_j-1)m(r,f) \tag{4}$$

将(4)代入(3)中, 并由引理（2.1）得到

$$m(r,A_0)\le\sum_{j-1}^{k-1}m(r,A_j)+\sum_{j-1}^{k}n_jm(r.\frac{f^{(j)}}{f})+\sum_{j-1}^{k}(n_j-1)m(r,f)$$

$$\le\sum_{j=1}^{k\ 1}m(r,A_j)+klog^{+}T(2r,f)+O(1)T(2r,f)$$

$$\le\sum_{j-1}^{k\ 1}m(r,A_j)+O(1)T(2r,f) \tag{5}$$

令$b=max\{\sigma_{[1,2]}(A_j):j=1,2,,,k-1\}\ \le\sigma_{[1,2]}(A_0)$则有

$$m(r,A_j)\le T(r,A_j)\le(logr)^{b+\varepsilon}\qquad(j=1,2,\ldots,k-1)$$

因为$\sigma_{[1,2]}(A_0)\quad\sigma$, 由引理（2.2）存在 -个点列$\{r_n\}$使得对于所有的$r_n\notin E_1$和任意的$\varepsilon(0<3\varepsilon<a-b)$有

$$m(r_n,A_0)=T(r_n,A_0)\ge(logr_n)^{\sigma-\varepsilon}$$

代入到（5）中, 得到

$$(logr_n)^{\sigma-\varepsilon}\le(logr_n)^{b+\varepsilon}+O(1)T(2r_n,f)$$

$$(1-o(1))(logr_n)^{\sigma-\varepsilon}\le O(1)T(2r_n,f)$$

对于所有的$r_n\in E_1$, 由上式定理得证.

2.4 定理2的证明

证明：假设$f(z)$是方程（1）的一个非零解, 将（1）化简得到

$$-A_s(z)-\frac{(f^{(k)})^{n_k}}{(f^{(s)})^{n_s}}+A_{k-1}(z)\frac{(f^{(k-1)})^{n_{k-1}}}{(f^{(s)})^{n_s}}+\cdots+A_{s+1}(z)\frac{(f^{(s+1)})^{n_{s+1}}}{(f^{(s)})^{n_s}}$$

$$+A_{s-1}(z)\frac{(f^{(s-1)})^{n_{s-1}}}{(f^{(s)})^{n_s}}+\cdots+A_0(z)\frac{f}{(f^{(s)})^{n_s}}$$

$$-\frac{1}{(f^{(s)})^{n_s-1}}[\frac{(f^{(k)})^{n_k}}{f^{(s)}}+A_{k-1}(z)\frac{(f^{(k-1)})^{n_{k-1}}}{f^{(s)}}+\cdots+A_{s+1}(z)\frac{(f^{(s+1)})^{n_{s+1}}}{f^{(s)}}]$$

$$+\frac{f}{(f^{(s)})^{n_s}}[A_{s-1}(z)\frac{(f^{(s-1)})^{n_{s-1}}}{f}+\cdots+A_1(z)\frac{(f')^{n_1}}{f}+A_0(z)] \tag{6}$$

因为

$$m(r,\frac{f}{(f^{(s)})^{n_s}})=m(r,f\cdot\frac{1}{(f^{(s)})^{n_s}})\leq T(r,f)+T(r,\frac{1}{(f^{(s)})^{n_s}})$$

$$<T(r,f)+n_sT(r,\frac{1}{f^{(s)}})<T(r,f)+n_sm(r,f^{(s)})+n_sN(r,f^{(s)})+O(1)$$

$$\leq(n_s+1+sn_s)T(r,f)+m(r,\frac{f^{(s)}}{f})+O(1) \tag{7}$$

将（7）代入（6）中, 并由引理（2.1）得到

$$T(r,A_s)=m(r,A_s)\leq\sum_{j\neq s}m(r,A_j)+(n_s-1)(s+1)T(r,f)+(n_s-1)m(r,\frac{f^{(s)}}{f})$$

$$+n_s(s+2)T(r,f)+n_sm(r,\frac{f^{(s)}}{f})+O(1)$$

$$=\sum_{j\neq s}m(r,A_j)+(2n_s+n_s-s-1)T(r,f)+(2n_s-1)m(r,\frac{f^{(s)}}{f})+O(1)$$

$$\leq\sum_{j\neq s}m(r,A_j)+(2n_s-1)max\{(k-s),s\}logT(r,f)+(2n_s+n_s-s-1)T(r,f)+O(1)$$

$$\leq\sum_{j\neq s}T(r,A_j)+(2n_s+n_s-s-1)(1-o(1))T(r,f) \tag{8}$$

类似定理1的证明一样, 此处我们令$b-max\{\sigma_{[1,2]}(A_j):j\neq s\}\leq\sigma_{[1,2]}(A_s)$,则有

$$T(r,A_j)\leq(logr)^{b+\varepsilon}(j\neq s) \tag{9}$$

因为$\sigma_{[1,2]}(A_0)-\sigma$, 由引理（2.2）知存在一个点列$\{r_n\}$使得对于所有的$r_n\notin E_1$和任意的$\varepsilon(0<3\varepsilon<a-b)$有

$$T(r_n,A_s)\geq(logr_n)^{\sigma-\varepsilon} \tag{10}$$

将（9）和（10）代入到（8）中, 得到

$$(logr_n)^{\sigma-\varepsilon} \leq (logr_n)^{b+\varepsilon} + (2n_s + n_s - s - 1)(1 - o(1))T(r_n, f)$$

化简得到

$$(1 - o(1))(logr_n)^{\sigma-\varepsilon} \leq (2n_s + n_s - s - 1)(1 - o(1))T(r_n, f)$$

对于所有的$r_n \in E_1$, 由上式定理得证.

3 单位圆上高阶齐次线性微分方程解的[p,q]增长级

3.1 引言与结果

本章主要考虑如下的高阶复线性微分方程

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)f' + A_0(z)f = 0 \tag{3.1}$$

其中 $A_j(z) \neq 0(j = 0, 1, \cdots, k-1)$是单位圆上的整函数.

在对复微分方程的研究中, 在复平面、单位圆、角域里研究方程的增长级有着类似的地方, 但又有很多的不同, 很多学者分别在这三个区域里面考虑了微分方程解的性质, 得到了很多有价值的结果(参见[7-10,20,21,24,25]). 事实上很多复平面上的问题也可以在单位圆和角域里考虑(参见[15,16]), 很可能会得出新的结果, 所以研究微分方程在单位圆和角域内的性质是很有意义的.

3.2 引理

为证明上述定理，我们需要如下三个引理:

引理2.1[11] 假设$g:(0,1) \to R, h(0,1) \to R$是单调递增的函数, 并且$g(r) \leqq h(r)$成立, 除去一个例外集$E_1 \subsetneq [0,1)$满足$\int E_1 \frac{dr}{1-r} < \infty$, 则存在一个常数$d \in (0,1)$, 如果$s(r) = 1 - d(1-r)$, 则有$g(r) \leqq h(s(r))$对所有的$r \in [0,1)$成立.

引理2.2[12] 假设$p \geq 1 \geq 1$且都是是整数. $f(z)$是单位元上的亚纯函数并且有$\rho_{(p,q)}f = \rho < \infty$. 设$k \geq 1$是整数, 则对任意的$\varepsilon > 0$有

$$m(r, \frac{f^{(k)}}{f}) = O(exp_{p-1}\{(p+\varepsilon)log_q(\frac{1}{1-r})\})$$

成立, 除去一个例外值集$E_1 \subsetneq [0,1)$满足$\int E_1 \frac{dr}{1-r} < \infty$.

引理2.3[13] 假设$f(z)$是单位元上的亚纯函数, 令$k > 1$而且其为整数, 则

$$m(r, \frac{f^{(k)}}{f}) = S(r, f)$$

这里的$S(r,f) = O(log^+T(r,f) + log(\frac{1}{1-r}))$，除去一个例外集$E_1 \subseteq [0,1)$满足$\int E_1 \frac{dr}{1-r} < \infty$.

3.3 定理3的证明

证明：假设$f(z)$是方程（3.1）的一个非零解，将方程（3.1）变形得到

$$-A_0(z) = \frac{f^{(k)}}{f} + A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f} + \ldots + A_1(z)\frac{f'}{f}$$

由引理(2.3)有

$$m(r, A_0) \le \sum_{j-1}^{k-1} m(r, A_j) + \sum_{j-1}^{k} m(r, \frac{f^{(k)}}{f}) \tag{6}$$

$$= \sum_{j-1}^{k-1} m(r, A_j) + O(log^+T(r, f) + log(\frac{1}{1-r}))$$

$$\le \sum_{j-1}^{k-1} m(r, A_j) + klog^+T(r, f) + klog(\frac{1}{1-r})$$

令$b = max\{\sigma_{[1,2]}(A_j) : j = 1, 2, \ldots, k-1\} \le \sigma_{[1,2]}(A_0)$，则有

$$m(r, A_j) \le T(r, A_j) \le (\frac{1}{1-r})^{b+\varepsilon} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k-1)$$

因为$\sigma_{[1,2]}(A_0) \quad \sigma$，存在一个点列$\{r_n\}$使得对于所有的$r_n \notin E_1$和任意的$\varepsilon(0 < 3\varepsilon < a - b)$有

$$m(r_n, A_0) = T(r_n, A_0) \ge (\frac{1}{1-r_n})^{\sigma-\varepsilon}$$

代入到（5）中，并由引理（2.1）得到

$$(\frac{1}{1-r_n})^{\sigma-\varepsilon} \le (\frac{1}{1-r_n})^{b+\varepsilon} + O(log^+T(1-d(1-r_n), f) + log(\frac{1}{d(1-r)}))$$

$$(1-o(1))(\frac{1}{1-r_n})^{\sigma-\varepsilon} \le O(log^+T(1-d(1-r_n), f) + log(\frac{1}{d(1-r_n)}))$$

让$|z| \to 1$，由上式定理得证.

3.4 定理4的证明

证明：使用类似于定理2的变形方法，由上面三个引理进行简单推导即可得证.

4 总结和展望

4.1 总结

复线性微分方程理论是函数论复分析理论研究的一个重要方向, 也是值分布、Wiman-valion等理论的重要应用. 由方程系数的性质去考察解的性质不管对于复分析还是微分方程这些基础学科或者其他学科来说都具有十分重要的意义 每一个方程可能代表着现实世界的某种关系. 不管现在我们研究的结果能不能有具体的实际应用, 我们应该相信只要研究的结果能对所研究领域的理论进行完善, 那么这个研究就是有意义的. 复微分方程的理论研究虽然已经走过了很多年, 但是直到现在理论框架远远还没有达到完美, 还有很多需要我们努力去研究探索的地方. 复微分方程是一门综合性的学科, 特别是值分布理论和微分方程理论对其有着极为重要的影响, 所以复微分方程的研究是随着其他学科的发展而向前发展的. 我们相信只要努力专研, 一定可以做出优秀的结果.

4.2 展望

在复微分方程这个领域中, 已经有许多学者耕耘多年,也取得了许多有价值的结果, 但客观来说目前为止我们很多情况下都是在研究线性和齐次的微分方程, 不管是二阶的还是高阶的, 我们整个理论体系非常依赖于Neanlinna值分布理论、WIman-Valion 理论和常微分方程理论本身的研究成果和方法. 比如说, 在处理一个高阶的线性微分方程时我们能够用标准的方法将它逐步的化简成低阶的微分方程, 进而用低阶微分方程所取得的结果来推理它, 但是对于一个高阶的更一般的方程形式, 比如:

$$(f^{(k)})^{n_k} + A_{k-1}(z)(f^{(k-1)})^{n_{k-1}} + \cdots + A_1(z)(f')^{n_1} + A_0(z)f = 0$$

对于这样一个方程, 我们以前的很多方法是不适用的, 例如用标准方法将其降阶, 用WIman-Valion理论中处理线性微分方程著名定理:

假设$g(z)$ 是一个超越的全纯函数, 令$0 < \delta < \frac{1}{4}, |z| = r$, 且有

$$g(z) > M(r,g)V(r)^{-\frac{1}{4}+\delta}$$

成立, 则存在一个有限对数测度集合$\subset$使得对任意的$m > 0$和$r \notin F$都有:

$$g^{(m)}(z) = (\frac{V(r,g)}{z})^m(1 + o(1))g(z).$$

这个定理在证明线性微分方程解是有限级时非常有用, 但是在处理以上的高阶方程时也变得不方便了, 因为它的变量n_k是未知的, 它具有太多不确定的变量. 但是从理论上讲, 研究这样的微分方程是很有意义的, 我们同样可以在复平面、单位圆、角域里去研究它的增长级、零点分布、空间属性等问题. 对于增长级本文所考虑的都是只有一个系数的$[p, q]$ 级是最大的, 然后考察其解的$[p, q]$ 级, 我们还可以考虑在系数都是相同$[p, q]$ 级时系数的型对解的$[p, q]$ 级的影响等问题. 总而言之, 复微分方程理论还有许多需要完善的地方, 还有许多没有解决的问题, 而这些问题恰恰是这个分支的生命所在, 我们相信未来对于复微分方程的研究会取得更多的突破, 我们会对它有更加深刻的理解和更多的应用!

参考文献

[1] W.Hayman, Meromorphic Functions, Clarendon Press. Oxford,1964.

[2] Yang L, Value distribution theory and its new researches, Beijing: Beijing Science Press, 1992 (in Chinese).

[3] S.Bank, A note on the zeros of solutions of $w'' + P(z)w = 0$ where P is a polynomial, Appl. Anal. 25(1987),29-41.

[4] S.Bank and I.Laine, On the oscillation theory of $f'' + Af - 0$ where A is entire , Trans. Amer. Math. Soc.

[5] S.Bank and I.Laine, On the zeros of meromorphic solution of second order linear differential equations[J]. Comment.Math.Helvetici,1983.

[6] I Laine, Nevanlinna Theory and complex differential equations, Walter de Gruyter Berlin, New York, 1993.

[7] Janne Heittokangas, A Survey on Blaschke-Oscillatory Differential Equations,with Updates[J]. 2013.

[8] J.Heittokangas,R.Korhonen and J.Rättyä,Fast growthing solutions of linear differential equations in the unit disk[J]. 2010.

[9] Janne Heittokangas, Functions of finite logarithmic order in the unit disc, Part 1[J]. Journal of Matheatical Analysis and Aoo; ications, 2014.

[10] Pan gong,Lipeng xiao,[p,q] order of solutions of Linear Differenrtial Equations in the unit Disc[J].Pure Mathematics, 2014.

[11] Bank.s.General theorm concerning the growth of solutions of first order algebraic differential equations.compositio Mathematica, 25, 61-70, 1972.

[12] Benharrat Belaïdi,On the [p,q]-order of analytic solutions of linear differential equations in the unit disc[J]. NOVI SAD J.MATH, 2012.

[13] B.Belaidi and K.Hamani, Order and hyper-order of entire solutions of linear differential equations with entire coefficients[J].

[14] Janne Heittokangas, On complex differential equations in the unit disc. Ann. Acad. Sci Fenn.Math. Diss. 122(2000), 1-54.

[15] J.Rossi and S.Hellenstein, Zeros of meromorphic solutions of second order linear differential equations[J]. Math, 192(1986), 603-612.

[16] J.R$\acute{a}$tty$\dot{a}$, On some complex function spaces and classes[D]. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss, 124(2001), 1-73.

[17] Wu S. J , Angular distribution in complex oscillation theory, Science in China,Series A, 2005, 48(1): 107-114.

[18] Shengjian Wu, On the location of zeros of solutions of $f" + A(z) = 0$ where $A(z)$ is entire[J]. MATH SCAND, 1993.

[19] 高仕安,陈宗煊,陈特为, 线性微分方程的复振荡理论[M]. 华中理工大学出版社, 武汉, 1998.

[20] 何育赞,肖修治, 代数体函数与常微分方程[M]. 中国科学出版社, 1988.

[21] Li-peng xiao, complex differential equations with solutions in the Hardy spaces[J]. Taiwanese Journal of mathematics, 2014.

[22] G Gundersen, Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates, [J]. London Math. Soc. 37(1988), 88-104.

[23] TING-BIN CAO,KAI LIU and JUN WANG, On the growth of solutions of complex differential equations with entire Coefficients of Finite Logarithmic order, 2013. Electronic J.Differ. Equations, 17(2003), 1-12.

[24] Chr.Pommerenke, On the mean growth of the solutions of complex linear differential equations in the disc[J]. Complex Variables, 1(1982), 23-38 49(2004),913-925.

[25] E.Hille,Ordinary differential equations in the compelx domain,Pure and Applied Mathematics[M]. New York-Londen-Sydney, 1976.

[26] Janne heittokangas, Risto Korhonen,and Jouni rättyä,Linear differential equations with coefficients in weighted Bergman and Hardy Spaces[J]. TRANSCATIONS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, 2008.

[27] Kehe zhu, Operation Theory in Function Spaces[M]. New york, 1990.

[28] 蹇人宜，安恒斌，解析函数空间上的算子理论[M]. 科学出版社，2007.

[29] I.Laine and P Wu, On the oscillation of certain second order linear differential equations[J].Rev. Roum.Math, 4(1999), 609-615.

[30] I.Chyzhykov, G G.Gunderson and J.Heittokangas, Linear differential equations and logarithmic derivative estimates[J]. Proc.London Math.Soc, 86(2003), 735-754. equations, 65(2004), No, 1-8.

[31] J.Heittokangas, On complex linear differential equations in the unit disc[D]. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss, 122(2000), 1-54.

[32] J.Heittokangas, R.Korhonen and J.Rättyä, Growth estimates for solutions of linear complex differential equations [D].Ann.Acad. Sci. Fenn. Math.Diss, 29(2004), 233-246. unit disc[J]. Results Math, 49(2006), 265-278.

[33] J.Heittokangas, R.Korhonen and J.Rättyä, Linear differential equations with solutions in Dirichlet type subspace of the Hardy space[J]. J.Nagoya Math, 187(2007), 91-113.

附 录

本人在研究生三年期间发表1篇论文

易善峰，复级数列N次方倒数和的收敛性与部分复级数求和.

致 谢

本文得以完成,与我的导师伍鹏程教授的悉心指导和大力支持是分不开的.伍老师是我学术上的启蒙老师,他不仅把我带进了学术领域,扶着我迈出了稚嫩的第一步, 还通过言传身教,不但使我掌握了一套做学问的基本方法,还使我更加懂得了做人的道理.谚云:授人以鱼,一日食鱼;授人以渔,终生食鱼.伍老师授我的治学方法,使我一生受益,也使我一生铭记.

在三年的学习中, 我要感谢数计学院龙见仁,唐树安,杨从丽等老师以及各位领导对我学习上的关心和帮助.我还要感谢北京大学数学系的伍胜健和中国科学院的崔贵珍教授对我的热情帮助, 感谢贵州师范大学三年来对我的教育和培养. 另外, 我还要感谢三年来与我一起走过的同窗好友, 是你们的欢心笑语让我度过这段美好的时光.

最后, 我要感谢我的家人和朋友给我的支持和鼓励, 正是因为你们我才得以顺利完成学业.

原创性声明

本人郑重声明：所呈交的毕业学位论文，是本人在导师的悉心指导下，独立进行研究所取得的成果. 除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的科研成果. 对本文的研究做出重要贡献的个人或集体，均已在文中以明确方式标明. 本人完全意识到本声明的法律责任由本人承担.

论文作者签名：

日　　　期：　年　月　日

学位论文使用授权的声明

本人完全了解贵州师范大学有关保留、使用学位论文的规定、同意学校保留或向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅；本人授权贵州师范大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文和汇编学位论文.

(保密论文在解密后应遵守此规定)

论文作者签名：

导 师 签 名：

日　　　期：　年　月　日